数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 21-28

Quadratic Relations for Generalized Hypergeometric Functions

小原功任 (金沢大理), 杉木雄一 (東大数理), 高山信毅 (神戸大理)

1 超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ の二次関係式

一般超幾何関数は次の級数で定義される.

$$ {}_pF_{p-1}(a_1,\ldots,a_p,b_2,\ldots,b_p;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(1)_n(b_2)_n\cdots(b_p)_n}z^n. $$

ここで $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

$p=2$ のときが Gauss の超幾何関数である. Gauss の超幾何関数については次の二次関係式が成り立つことがよく知られている.

$$
\begin{aligned}
& {}_2F_1(a_1,a_2,b_2;z)\,{}_2F_1(-a_1,-a_2,2-b_2;z)\\
+\ & \frac{z}{b_2-1}\,{}_2F_1'(a_1,a_2,b_2;z)\,{}_2F_1(-a_1,-a_2,2-b_2;z)\\
-\ & \frac{z}{b_2-1}\,{}_2F_1(a_1,a_2,b_2;z)\,{}_2F_1'(-a_1,-a_2,2-b_2;z)\\
-\ & \frac{a_1+a_2-b_2+1}{a_1a_2(b_2-1)}z^2\,{}_2F_1'(a_1,a_2,b_2;z)\,{}_2F_1'(-a_1,-a_2,2-b_2;z)=1.
\end{aligned}
$$

ここで $e_2=b_2-1$ かつ $a_1a_2\neq 0, e_2, \notin \mathbf{Z}$.

我々は $p=3,4$ のときに同様の二次関係式を与えたので, それを報告する.

定理 1.1 一般超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ はパラメータ a_i, b_j が *generic* のときに, 次の二次関係式を満たす.

$$ \sum_{i=1,j=1}^{p}\left(\theta^{i-1}{}_pF_{p-1}(A,B;z)\right)\frac{c_{ij}}{c_{11}}\left(\theta^{j-1}{}_pF_{p-1}(-A,2-B;z)\right)=1. \qquad (1) $$

ここで $\theta=zd/dz$ かつ, $A=(a_1,\ldots,a_p)$, $B=(b_2,\ldots,b_p)$,$-A=(-a_1,\ldots,-a_p)$, $2-B=(2-b_2,\ldots,2-b_p)$.

また, c_{ij} は ${}_pF_{p-1}$ に付随するコサイクルの交点行列の逆行列の (i,j)-成分である. 定理 *3.1* により, 交点行列は p に関して再帰的に求まる.

定理 1.2 $p=3$
条件 $a_1a_2a_3 \neq 0, b_2, b_3 \notin \mathbf{Z}$ のもとで

$$
\begin{aligned}
& {}_3F_2(A,B;z)\,{}_3F_2(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{(-t_1+1)z}{t_2}\,{}_3F_2(A,B;z)\,{}_3F_2'(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{z^2}{t_2}\,{}_3F_2(A,B;z)\,{}_3F_2''(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{(t_1+1)z}{t_2}\,{}_3F_2'(A,B;z)\,{}_3F_2(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{((t_2+1)s_1-t_1s_2-s_3-t_1)z^2}{t_2s_3}\,{}_3F_2'(A,B;z)\,{}_3F_2'(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{(s_1+s_2-t_1-t_2)z^3}{t_2s_3}\,{}_3F_2'(A,B;z)\,{}_3F_2''(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{z^2}{t_2}\,{}_3F_2''(A,B;z)\,{}_3F_2(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{(s_1-s_2-t_1+t_2)z^3}{t_2s_3}\,{}_3F_2''(A,B;z)\,{}_3F_2'(-A,2-B;z) \\
+ & \frac{(s_1-t_1)z^4}{t_2s_3}\,{}_3F_2''(A,B;z)\,{}_3F_2''(-A,2-B;z) \\
= & 1.
\end{aligned}
$$

ここで $s_1=a_1+a_2+a_3$, $s_2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$, $s_3=a_1a_2a_3$, $t_1=e_2+e_3$, $t_2=e_2e_3$, $e_2=b_2-1, e_3=b_3-1$ かつ $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $B=(b_2,b_3,b_4)$, $-A=(-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)$, $2-B=(2-b_2,2-b_3,2-b_4)$.

定理 1.3 $p=4$.
$f(z)={}_4F_3(A,B;z)$, $g(z)={}_4F_3(-A,2-B;z)$ と置くと,
条件 $a_1a_2a_3a_4 \neq 0, b_2, b_3, b_4 \notin \mathbf{Z}$ のもとで

$$
\begin{aligned}
& f(z)g(z) \\
+ & \frac{(-t_1+t_2+1)z}{-t_3}f(z)g'(z) \\
+ & \frac{(-t_1+3)z^2}{-t_3}f(z)g''(z) \\
+ & \frac{z^3}{-t_3}f(z)g'''(z) \\
+ & \frac{(-t_1-t_2-1)z}{-t_3}f'(z)g(z) \\
+ & \frac{((t_2+1)s_1+(-t_1-t_3)s_2+(t_2+1)s_3+(s_4-1)t_1-t_3)z^2}{-t_3s_4}f'(z)g'(z) \\
+ & \frac{((t_2+t_3+3)s_1+(-t_1+2)s_2+(-t_1+2)s_3-3t_1-2t_2-s_4-2t_3)z^3}{-t_3s_4}f'(z)g''(z) \\
+ & \frac{(s_1+s_2+s_3-t_1-t_2-t_3)z^4}{-t_3s_4}f'(z)g'''(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{(-t_1-3)z^2}{-t_3} f''(z)g(z) \\
&+ \frac{((t_2-t_3+3)s_1+(-t_1-2)s_2+(t_1+2)s_3-3t_1+2t_2+s_4-2t_3)z^3}{-t_3s_4} f''(z)g'(z) \\
&+ \frac{((t_2+9)s_1-t_1s_2-s_3-9t_1+t_3)z^4}{-t_3s_4} f''(z)g''(z) \\
&+ \frac{(3s_1+s_2-3t_1-t_2)z^5}{-t_3s_4} f''(z)g'''(z) \\
&+ \frac{-z^3}{-t_3} f'''(z)g(z) \\
&+ \frac{(s_1-s_2+s_3-t_1+t_2-t_3)z^4}{-t_3s_4} f'''(z)g'(z) \\
&+ \frac{(3s_1-s_2-3t_1+t_2)z^5}{-t_3s_4} f'''(z)g''(z) \\
&+ \frac{(s_1-t_1)z^6}{-t_3s_4} f'''(z)g'''(z) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

ここで s_i は $a_1,\ldots,a_4$ の基本対称式, t_i は $e_2=b_2-1, e_3=b_3-1, e_4=b_4-1$ の基本対称式.

2 ${}_pF_{p-1}$ の積分表示とツイストコホモロジ

定理 1.1 を示すのにはツイストコホモロジの理論が用いられる. ここでは超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ にしぼって考えていく. ツイストコホモロジに関する一般論については文献 [1],[9] を参照されたい.

まず, 超幾何関数 ${}_pF_{p-1}(A,B,t)$ は次の積分表示を持つ.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(a_p)\Gamma(b_p-a_p)}{\Gamma(b_p)} t^{b_p-1} {}_pF_{p-1}(a_1,\ldots,a_p;b_2,\ldots,b_p;t) \\
&\quad = \int_0^t s^{a_p}(t-s)^{b_p-1-a_p} {}_{p-1}F_{p-2}(a_1,\ldots,a_{p-1};b_2,\ldots,b_{p-1};s)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

$f_j = \theta^{j-1} {}_{p-1}F_{p-2}(A';B';s)$ と置く. この積分の積分核は次の微分方程式を満たす.

$$
(d - \frac{ds}{s}{}^tL_0 - \frac{ds}{s-t}{}^tL_1 - \frac{ds}{s-t}{}^tL_t)\left\{ s^{a_p}(s-t)^{b_p-1-a_p} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{p-1} \end{pmatrix} \right\} = 0.
$$

ただし, $p-1$ 次正方行列 L_0, L_1, L_t は 次で定義される.

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \begin{pmatrix} a_p & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & -B_1 \\ \vdots & \ddots & a_p & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_p - B_{p-2} \end{pmatrix}, \\
L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B_0 - C_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{p-2} - C_{p-2} \end{pmatrix}, \\
L_t &= \begin{pmatrix} e_p - a_p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_p - a_p \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

また B_k, C_k はパラメータの基本対称式である.

$$
\begin{aligned}
x\prod_{i=2}^{p-1}(x+b_i-1) &= B_0 + B_1 x + \cdots + B_{p-2}x^{p-2} + x^{p-1}, \\
\prod_{i=1}^{p-1}(x+a_i) &= C_0 + C_1 x + \cdots + C_{p-2}x^{p-2} + x^{p-1}.
\end{aligned}
$$

このことに注意すると, 以下のようなシチュエーションで, ツイストコホモロジ群 $H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla)$ とツイストホモロジ群 $H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla^*)$ を構成でき, ${}_pF_{p-1}$ をそのペアリングとして捉えることができる.

$$
\begin{aligned}
T &= \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\}, \\
\Omega &= \frac{ds}{s}L_0 + \frac{ds}{s-1}L_1 + \frac{ds}{s-t}L_t, \\
\nabla &= d + \Omega, \\
\nabla^* &= d - {}^t\Omega.
\end{aligned}
$$

ペアリング

$$
\langle\ ,\ \rangle : H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla^*) \times H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla) \to \mathbf{C}
$$

を超幾何積分というが, 特に

$$
\langle \sigma, \varphi_1 \rangle = \frac{\Gamma(a_p)\Gamma(b_p - a_p)}{\Gamma(b_p)} t^{b_p - 1} {}_pF_{p-1}(A; B; t)
$$

が成り立つ. ここで,

$$
\sigma = \mathrm{reg}\left\{ (0,t) \otimes s^{a_p}(s-t)^{b_p-1-a_p} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{p-1} \end{pmatrix} \right\},
$$

$$\varphi_1 = \frac{ds}{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である.

さて, 交点数を考えるためには, $H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla)$ と対になるツイストコホモロジ群を構成する必要がある. これは次のようにすればよい. まず, 正則な定数行列 S を固定する. この S をどのようにとるべきかは後でみる.

次に,

$$ {}^t\Omega S + S\Omega_- = 0 \tag{2}$$

を満たす Ω_- によって定まる

$$\nabla_- := d + \Omega_-$$

を ∇ の (S に関する) **共役接続**と呼ぶことにする.

共役接続 ∇_- についてもツイストコホモロジ群 $H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-)$ とツイストホモロジ群 $H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-^*)$ が構成される.

定義 2.1 次を**交点形式**という.

$$\begin{array}{ccc} H_c^1(T, \mathrm{Ker}\nabla) \times H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-) & \to & \mathbf{C} \\ ([\psi], [\varphi]) & \mapsto & [\psi]\cdot[\varphi] := \displaystyle\int_T S(\psi, \varphi). \end{array}$$

ただし, $S(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ は S から誘導される双線型形式である.

このとき, ツイストホモロジ群についても交点形式が誘導され, 次の図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} H_c^1(T, \mathrm{Ker}\nabla) & \overset{\text{交点形式}}{\longleftrightarrow} & H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-) \\ \updownarrow \text{超幾何積分} & & \updownarrow \text{超幾何積分} \\ H_1^{lf}(T, \mathrm{Ker}\nabla^*) & \overset{\text{交点形式}}{\longleftrightarrow} & H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-^*). \end{array}$$

それぞれのツイスト (コ) ホモロジ群から基底

$$\begin{array}{ll} c_i \in H_c^1(T, \mathrm{Ker}\nabla), & c_i^\vee \in H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-), \\ h_i \in H_1^{lf}(T, \mathrm{Ker}\nabla^*), & h_i^\vee \in H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-^*) \end{array}$$

をとって, 行列

$$P = (\langle h_i, c_j\rangle)_{ij},\ Q = (\langle h_i^\vee, c_j^\vee\rangle)_{ij},\ I_{ch} = ([c_i]\cdot[c_j^\vee])_{ij},\ I_h = ([h_i]\cdot[h_j^\vee])_{ij}$$

を定めよう. つまり, P, Q は超幾何積分の行列, I_{ch} はコホモロジの交点行列, I_h はホモロジの交点行列である.

すると, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1 (ツイスト周期関係式)

$$ {}^tP\,{}^tI_{ch}^{-1}Q = I_h. \tag{3} $$

すでにみたように, 我々の場合には, 超幾何積分の行列 P は ${}_pF_{p-1}(A,B,t)$ たちからつくられるが, S を勝手にとった場合には Q がどのようなものになるかは自明ではない. 我々が必要とするのは, 超幾何積分の行列 Q が ${}_pF_{p-1}(-A,2-B,t)$ からつくられる場合である. つまり, 我々の場合には Ω_- は, Ω のパラメータを $A \mapsto -A$, $B \mapsto 2-B$ で置き換えたものでなければならない.

仮に, 超幾何積分の行列 P, Q が微分方程式

$$ \begin{aligned} dP - {}^t\Omega_1 P &= 0, \\ dQ - {}^t\Omega_2 Q &= 0 \end{aligned} $$

を満たし, I_{ch}, I_h が定数である場合には, ツイスト周期関係式 (3) を微分することにより, 関係式

$$ {}^t\Omega_1 I_{ch} + I_{ch}\Omega_2 = 0 \tag{4} $$

が得られることに注意しよう.

式 (2) と式 (4) を比較することによって, 結局, S としては ${}_{p-1}F_{p-2}(A',B',s)$ に関するコホモロジの交点行列をとればよいことがわかる.

3 交点行列

$H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla)$ のコサイクル

$$ \varphi_1 = \frac{ds}{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{ds}{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \varphi_{p-1} = \frac{ds}{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, $$

$$ \varphi_p = \frac{ds}{s}\begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \\ \vdots \\ -B_{p-2} \end{pmatrix} + \frac{ds}{s-1}\begin{pmatrix} B_0 - C_0 \\ B_1 - C_1 \\ \vdots \\ B_{p-2} - C_{p-2} \end{pmatrix} $$

を考える.

ここで, 関係式

$$ \langle \sigma, \varphi_j \rangle = \frac{\Gamma(a_p)\Gamma(b_p - a_p)}{\Gamma(b_p)} t^{b_p-1}\theta^{j-1}{}_pF_{p-1}(A,B,z) \qquad (j = 1, \ldots, p) $$

に注意する.

$$\varphi_j^{\vee} := \varphi_j|_{a_k \to -a_k, b_k \to 2-b_k}$$

で $\varphi_j^{\vee} \in H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_-)$ を定める.

$T = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\}$ なので, 交点行列 $I_{ch} = ([\varphi_i] \cdot [\varphi_j^{\vee}])_{i,j}$ を具体的に求めることができる. 以下, $e_k := b_k - 1$ とする.

定理 3.1 条件 $b_i - a_j \notin \mathbf{Z}$, $\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) \notin \mathbf{Z}$. $(2 \leq k < p)$ を仮定する. このとき,

$$I_{ch}^{(p)} = 2\pi\sqrt{-1}\left(\begin{array}{c|c} {}^tM_0 I_{ch}^{(p-1)} & u \\ \hline -v & -c \end{array}\right).$$

ここで

$$\begin{aligned}
M_0 &= L_0^{-1} - L_\infty^{-1}, \\
M_1 &= a_p L_0^{-1} - e_p L_\infty^{-1}, \\
M_2 &= a_p^2 L_0^{-1} - e_p^2 L_\infty^{-1} - (a_p - e_p)I, \\
u &= ({}^tM_1 I_{ch}^{(p-1)} \text{の第 } p-1 \text{ 列目}), \\
v &= ({}^tM_1 I_{ch}^{(p-1)} \text{の第 } p-1 \text{ 行目}), \\
c &= ({}^tM_2 I_{ch}^{(p-1)} \text{の第 } (p-1, p-1) \text{ 成分}).
\end{aligned}$$

交点行列の逆行列 I_{ch}^{-1} が得られると, 定理 2.1 から直ちに二次関係式が得られる.

定理 3.2 $p = 2$

$$\begin{aligned}
I_{ch}^{-1} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}(-a_1)(e_2 - a_2)}\begin{pmatrix} -B_1C_0 & -C_0 \\ C_0 & C_1 - B_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}(-a_1)(e_2 - a_2)}\begin{pmatrix} -a_1a_2e_2 & -a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_1 + a_2 - e_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ここで $C_0 = a_1a_2$, $C_1 = a_1 + a_2$, $B_1 = e_2$.

$p = 3$

$$I_{ch}^{-1} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2(-a_1)(e_2 - a_2)(e_3 - a_3)} \times \begin{pmatrix} -B_1C_0 & -B_2C_0 & -C_0 \\ B_2C_0 & C_0 + B_2C_1 - B_1C_2 & C_1 - B_1 \\ -C_0 & -(C_1 - B_1) & -(C_2 - B_2) \end{pmatrix}.$$

ここで $C_0 = a_1a_2a_3$, $C_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$, $C_2 = a_1 + a_2 + a_3$, $B_1 = e_2e_3$, $B_2 = e_2 + e_3$.

$$
I_{ch}^{-1} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3(-a_1)(e_2-a_2)(e_3-a_3)(e_4-a_4)} \times
$$

$$
\begin{pmatrix}
-B_1C_0 & -B_2C_0 & -B_3C_0 & -C_0 \\
B_2C_0 & B_3C_0+B_2C_1-B_1C_2 & C_0+B_3C_1-B_1C_3 & C_1-B_1 \\
-B_3C_0 & -(C_0+B_3C_1-B_1C_3) & -C_1-B_3C_2+B_2C_3+B_1 & -(C_2-B_2) \\
C_0 & C_1-B_1 & C_2-B_2 & C_3-B_3
\end{pmatrix}
$$

ここで $C_0 = a_1a_2a_3a_4$, $C_1 = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_1 + a_4a_1a_2$, $C_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$, $C_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $B_1 = e_2e_3e_4$, $B_2 = e_2e_3 + e_3e_4 + e_4e_2$, $B_3 = e_2 + e_3 + e_4$.

参考文献

[1] K.Aomoto and M.Kita, *Theory of Hypergeometric Functions*, (in Japanese) Springer-Tokyo, 1994.

[2] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, Nagoya Mathematical Journal, **139**, (1995), 67–86.

[3] M.Kita and M.Noumi, On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions, Japanese Journal of Mathematics, **9** 1983, 113–157.

[4] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles I, Mathematische Nachrichten, **166**, (1994), 287–304.

[5] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles II, Mathematische Nachrichten, **168**, (1994), 171–190.

[6] K. Matsumoto. Intersection numbers for logarithmic k-forms, Osaka J. Math. **35** (1998), 873–893

[7] K. Ohara, Computation of the monodromy for the generalized hypergeometric function ${}_pF_{p-1}(a_1,\ldots,a_p;b_2,\ldots,b_p;z)$, Kyushu Journal of Mathematics **51** (1997), 101–124.

[8] K. Ohara, Intersection forms of twisted cohomology groups associated with Selberg-type integrals, preprint.

[9] K. Ohara, Y. Sugiki and N. Takayama, Quadratic Relations for Generalized Hypergeometric Functions ${}_pF_{p-1}$, preprint.